**Guía de verano Mecánica 3º Medios**

## Introducción

Esta guía servirá como un repaso, de las ideas asociadas con una rama de las matemáticas muy importantes para el físico. El algebra vectorial es importante porque permite escribir en forma conveniente y abreviada algunas expresiones muy complicadas. Por ejemplo, en algebra elemental la ecuación $3x+2y=6$ es una notación abreviada para todos los posibles pares de valores **x** e **y** que satisfagan esta ecuación. Es también posible describir esta misma relación de otra manera: mostrando un gráfico de esta ecuación como el de la figura 1. Ambos ejemplos son fácilmente comprensibles para cualquier estudiante que haya estudiado algebra y geometría analítica, porque puede comprender ka notación abreviada. En la misma forma, el algebra vectorial es fácilmente comprensible, una vez que la notación ha sido entendida.

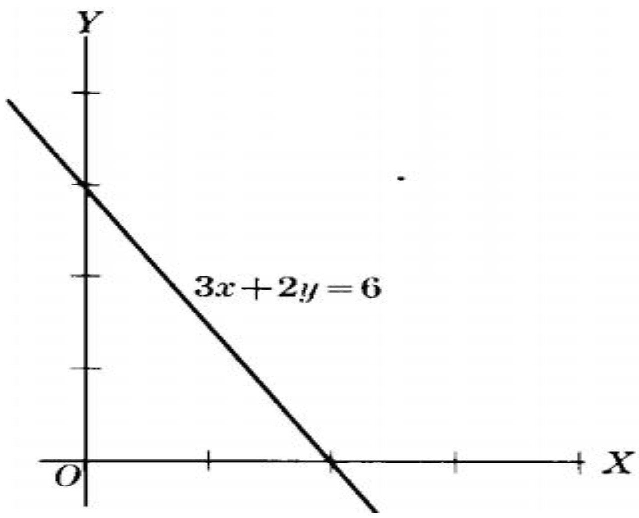
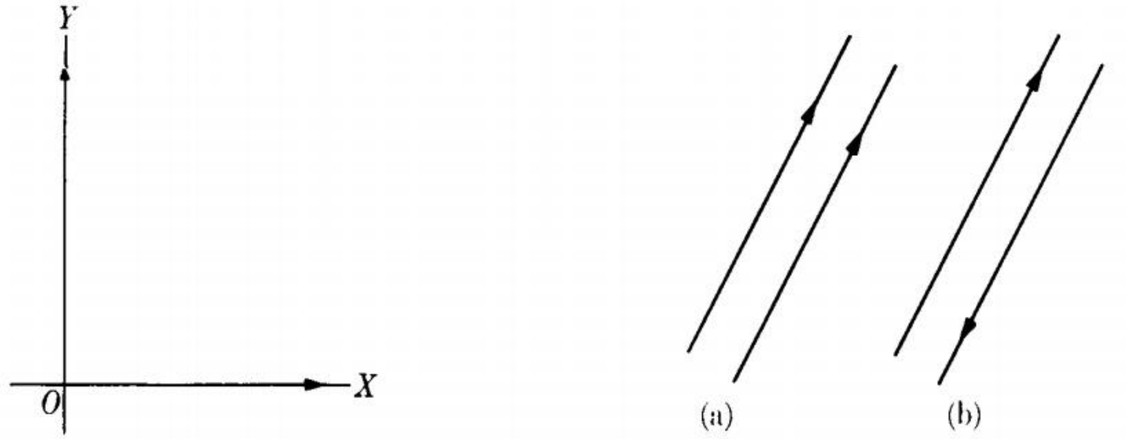



**Fig. 1**

## Concepto de dirección

Cuando tenemos una línea recta, podemos movernos a lo largo de ella en dos sentidos opuestos, dichos sentidos se distinguen asignando a cada una de ellos un signo, positivo o negativo. Una vez que el sentido positivo ha sido determinado, decimos que la línea esta orientada y la llamamos un eje. Los ejes coordenados **X** e **Y** son líneas orientadas en las cuales los sentidos positivos se han indicado en la figura 2. El sentido positivo se indica usualmente por una flecha. Una línea orientada define la dirección. Las líneas paralelas orientadas en el mismo sentido definen la misma dirección figura
2(a), pero si tienen diferentes orientaciones definen direcciones opuestas figura 2(b)




**Ejes coordenados orientadores** **Direcciones paralelas y antiparalelas**

**Fig. 2**

Las direcciones en un plano se determinan por un ángulo, que es el ángulo entre una dirección de referencia y la dirección que deseamos indicar, medido e dirección contraria al movimiento de las agujas del reloj figura 3. Las direcciones opuestas corresponden a los ángulos $\theta$ y $\pi+\theta$ o $(180^0+\theta)$

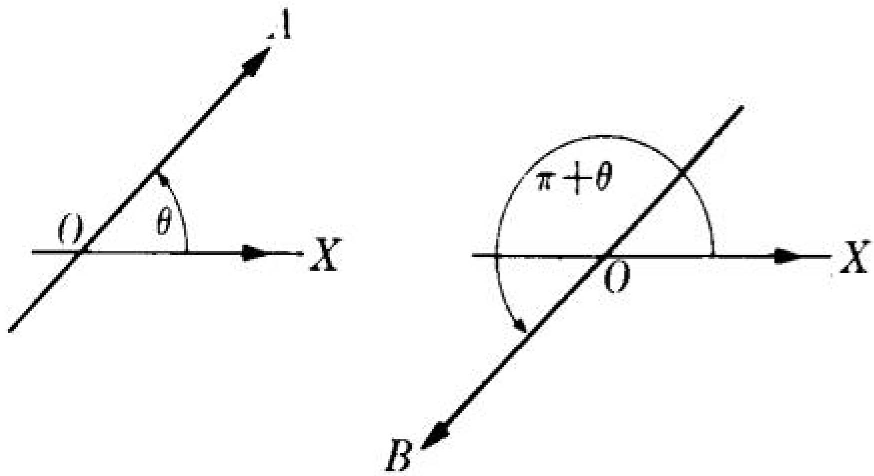



**Fig. 3 En un plano, direcciones opuestas están definidas por los ángulos $\theta$ y $\pi+\theta$**

## Escalares y Vectores

Muchas cantidades físicas quedan completamente determinadas por su magnitud, expresada en alguna unidad conveniente. Dichas cantidades se llaman escalares. Por ejemplo, para especificar el volumen de un cuerpo es necesario solamente indicar cuantos metros o pies cúbicos ocupa. Para conocer una temperatura es suficiente leer un termómetro convenientemente colocado. El tiempo, la masa, la carga y la energía son también cantidades escalares
Otras magnitudes físicas requieren para su completa determinación, que se añada una dirección a su magnitud. Dichas cantidades las llamamos vectores. El caso más sencillo es el desplazamiento. El desplazamiento de un cuerpo se determina por la distancia efectiva que se ha movido y la dirección en la cual se ha movido. Por ejemplo, si una partícula se desplaza de **O** a **A** Fig. 4, el desplazamiento queda determinado por la distancia $d=5$ y el ángulo $\theta \approx 37^0$. La velocidad es también una cantidad vectorial, desde que el movimiento se determina por la rapidez del desplazamiento y la dirección del desplazamiento. Análogamente la fuerza y la aceleración son cantidades vectoriales.

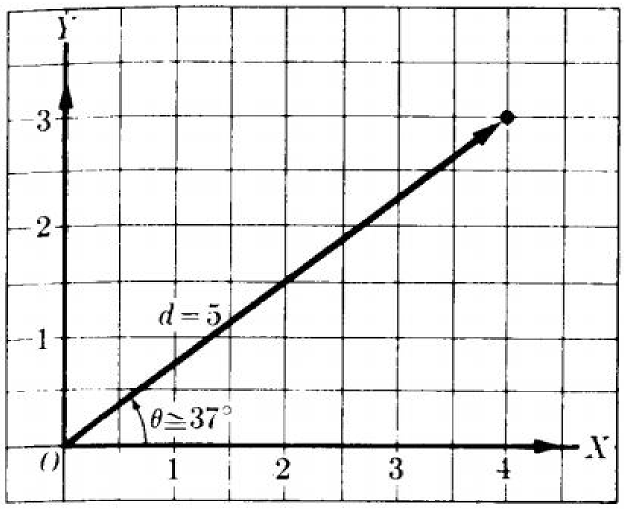



**Fig. 4 El desplazamiento en una cantidad vectorial**

Los vectores se representan gráficamente por segmentos de una línea recta que tiene la misma dirección que el vector (indicada por una flecha) y una longitud proporcional a la magnitud. La representación $\vec{V}$, indica un vector (esto es magnitud más dirección). La representación $|\vec{V}|$, indica la magnitud de un vector (esto es tamaño). Un vector unitario es un vector cuya magnitud es uno. Un vector **V** paralelo al vector unitario $\hat{u}$ se puede expresar en la forma

$$\mathbf{V} = uV$$

El negativo de un vector es otro vector que tiene la misma magnitud pero dirección opuesta.

Si dos vectores **V y V'** son paralelos entre sí, se puede escribir como **V** $= uV$ y **V'** $= uV'$, donde el vector unitario es el mismo. De esta manera si ª $= \frac{V}{V'}$ podemos escribir

$$\mathbf{V} = ª\ \mathbf{V'}$$

## Suma de vectores: métodos geométricos

**Método del triángulo** Para sumar dos vectores, digamos $\vec{B}$ y $\vec{A}$ (es decir, para obtener $\vec{A}+\vec{B}$ ) con el **método del triángulo**, primero dibujamos $\vec{A}$ en una hoja de papel milimétrico usando cierta escala Fig. 5 Por ejemplo, si $\vec{A}$ es un desplazamiento en metros, una escala conveniente sería 1 cm.: 1m, de modo que un vector de 1cm de longitud en el diagrama corresponda a 1m de desplazamiento. Como se indica en la Fig. 6, la dirección del vector $\vec{A}$ se especifica con un ángulo ¯$_A$ relativo a un eje de coordenadas, por lo regular el eje *X*.

Luego, dibujamos $\vec{B}$ con su cola en la punta de $\vec{A}$. (Por esto, el método también se conoce como método de punta a cola.) El vector que va desde la cola de $\vec{A}$ hasta la punta de $\vec{B}$ será entonces el vector suma $\vec{R}$ o la resultante de los dos vectores: $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$

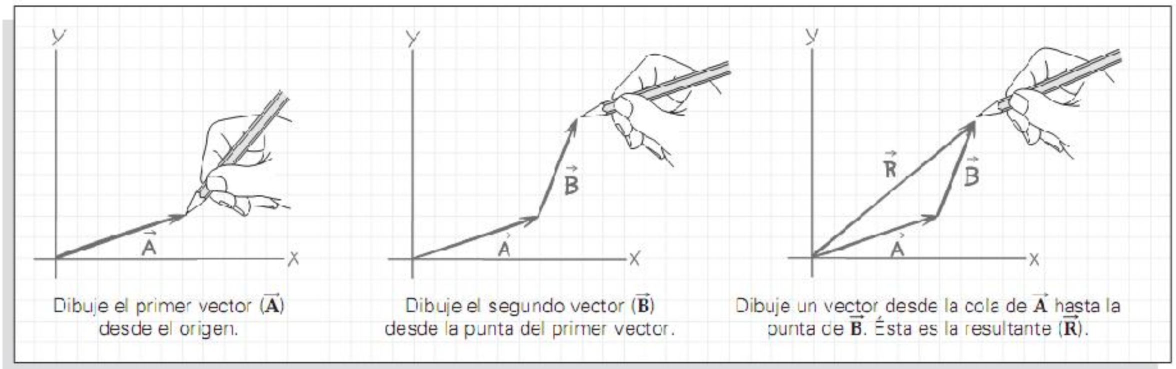



**Fig. 5**

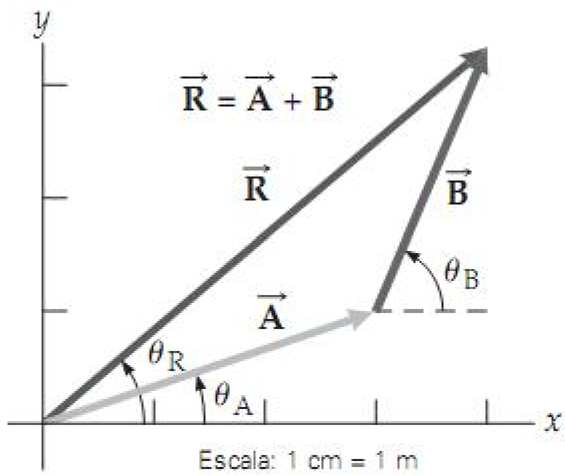



**Fig. 6**

Si los vectores se dibujaron a escala, se podrá obtener la magnitud de $\vec{R}$ midiendo su longitud y aplicando la conversión de escala. Con un enfoque gráfico así, la dirección del ángulo $\theta_R$ se mide con un transportador. Si conocemos las magnitudes y direcciones (ángulos $\theta$) de $\vec{A}$ y de $\vec{B}$, también podremos calcular analíticamente la magnitud y la dirección de $\vec{R}$ utilizando métodos trigonométricos. En el caso del triángulo no rectángulo de la Fig. 7, utilizaríamos las leyes de los senos y cósenos. (Tarea)

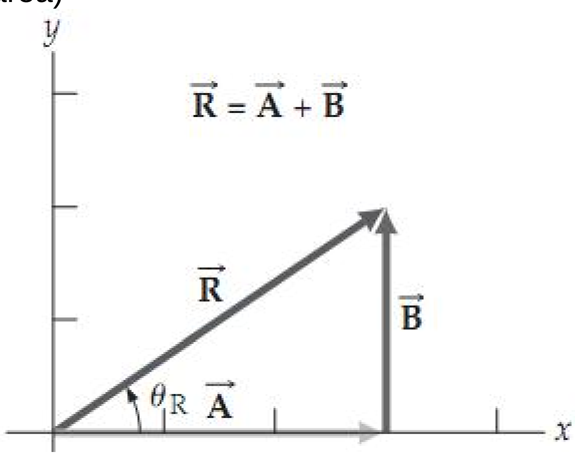


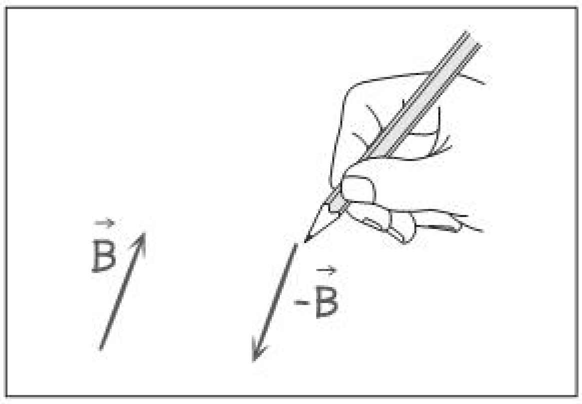

**Fig. 7**

El método de punta a cola puede aplicarse a cualquier número de vectores. El vector que forma la cola del primer vector a la punta del segundo es la resultante o suma de vectores. Para más de dos vectores, se denomina método del polígono. La resultante del triángulo rectángulo de vectores de la Fig. 7 sería mucho más fácil de calcular, utilizando el teorema de Pitágoras para obtener la magnitud, y una función trigonométrica inversa para obtener el ángulo de dirección. Observe que $\vec{R}$ está constituido por los componentes ***x*** y ***y*** de $\vec{A}$ y $\vec{B}$.Tales componentes **x** y **y** son la base del método analítico de componentes.

**Resta de vectores** La resta de vectores es un caso especial de la suma:

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+\left(-\vec{B}\right)$$

Es decir, para restar $\vec{B}$ de $\vec{A}$ sumamos un $\vec{B}$ *negativo* a $\vec{A}$. Un signo menos simplemente significa que el sentido del vector es opuesto al de aquel que lleva el signo más (por ejemplo, +*x* y $-x$). Lo mismo es válido para los vectores con notación de negritas. El vector $-\vec{B}$ tiene la misma magnitud que el vector $\vec{B}$ pero está en sentido opuesto Fig. 8.



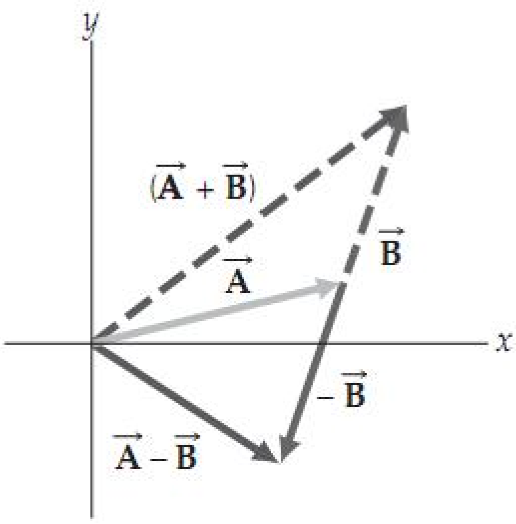




**Fig. 8**

## Componentes de vectores y método analítico de componentes

Probablemente el método analítico más utilizado para sumar varios vectores sea el **método de componentes**. En esta guía lo usaremos de forma continua, por lo que es indispensable entender bien sus fundamentos.

**Suma de componentes rectangulares de vectores** Componentes rectangulares se refiere a componentes de vectores que forman un ángulo recto ($90^0$) entre sí; por lo regular se toman en las direcciones de las coordenadas rectangulares **x** y **y**. Para el caso general, suponga que se suman $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dos vectores perpendiculares, como en la Fig. 9. El ángulo recto facilita la tarea. La magnitud de $\vec{C}$ está dada por el teorema de Pitágoras:

$$C^2=\sqrt{A^2+B^2}$$

La orientación de $\vec{C}$ relativa al eje **x** está dada por el ángulo

$$- = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)$$

Esta notación es como se expresa una resultante en **forma de magnitud-ángulo**.

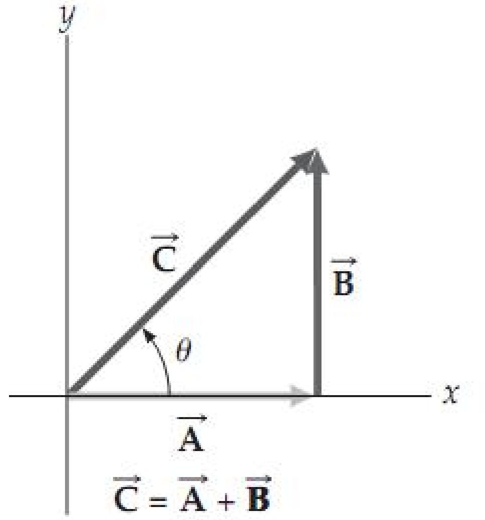



**Fig. 9**

## Descomposición de un vector en componentes rectangulares; vectores unitarios

La descomposición de un vector en componentes rectangulares es en esencia el inverso de la suma de los componentes rectangulares del vector. Dado un vector $\vec{C}$ la Fig.10 ilustra cómo puede descomponerse en componentes vectoriales $\vec{C}_X$ y $\vec{C}_Y$ en las direcciones **x** y **y**. Basta completar el triángulo de vectores con componentes **x** y **y**. Como muestra el diagrama, las magnitudes, o longitudes vectoriales, de estos componentes están dadas por

$$C_X = C\cos\theta \qquad C_Y = C sen\theta \qquad \text{(Componentes de vectores)}$$

El ángulo de dirección de $\vec{C}$ también puede expresarse en términos de los componentes, dado que $\tan\theta = \frac{C_Y}{C_X}$, o

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{C_Y}{C_X}\right)$$ (Dirección del vector a partir de las magnitudes de los componentes)

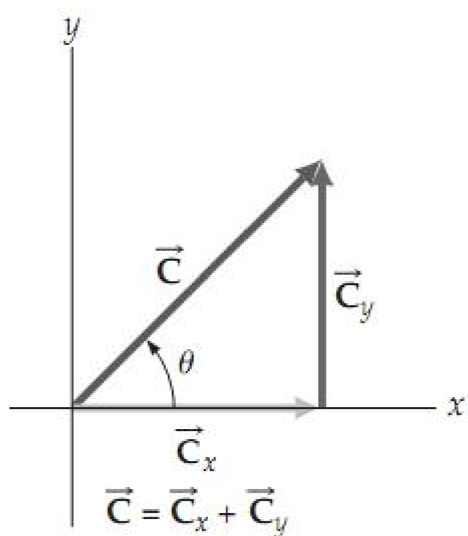



**Fig. 10**

Otra forma para expresar la magnitud y dirección de un vector incluye vectores unitarios. Por ejemplo, como se muestra en la Fig. 11, un vector $\vec{A}$ se puede escribir como $\vec{A} = A\hat{a}$ La magnitud numérica se representa con *A*, y $\hat{a}$ se llama **vector unitario**. Es decir, su magnitud es 1, pero no tiene unidades, de modo que simplemente indica la dirección del vector. Por ejemplo, una velocidad a lo largo del eje *x* se escribiría $\vec{v} = \left(4\frac{m}{s}\right)\hat{x}$ (es decir, una magnitud de 4.0 m/s en la dirección +*x*).

Observe cómo en la Fig. 11 $-\vec{A}$ se representaría mediante esta notación. Aunque a veces se coloca el signo menos antes de la magnitud numérica, esta cantidad es un número absoluto; el menos realmente se refiere al vector unitario:
$-\vec{A} = -A\hat{a} = A\left(-\hat{a}\right)$ Es decir, el vector unitario tiene el sentido $-\hat{a}$ (opuesta a $\hat{a}$).

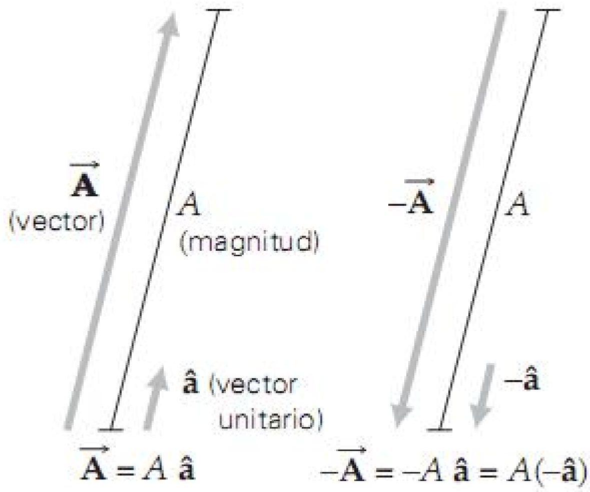



**Fig. 11**

Podemos usar esta notación para expresar explícitamente los componentes rectangulares de un vector. En algunos casos, podría ser más conveniente expresar un vector general en esta **forma de componentes** de vectores unitarios:

$$\vec{C} = C_X\,\hat{x} + C_Y\,\hat{y}$$

## Suma de vectores usando componentes

El **método analítico de componentes** para sumar vectores implica descomponer los vectores en componentes rectangulares y sumarlos en cada eje de manera independiente.

Este método se ilustra gráficamente en la Fig. 12 con dos vectores $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$
Las sumas de los componentes **x** y **y** de los vectores que se están sumando son entonces iguales a los componentes correspondientes del vector resultante.

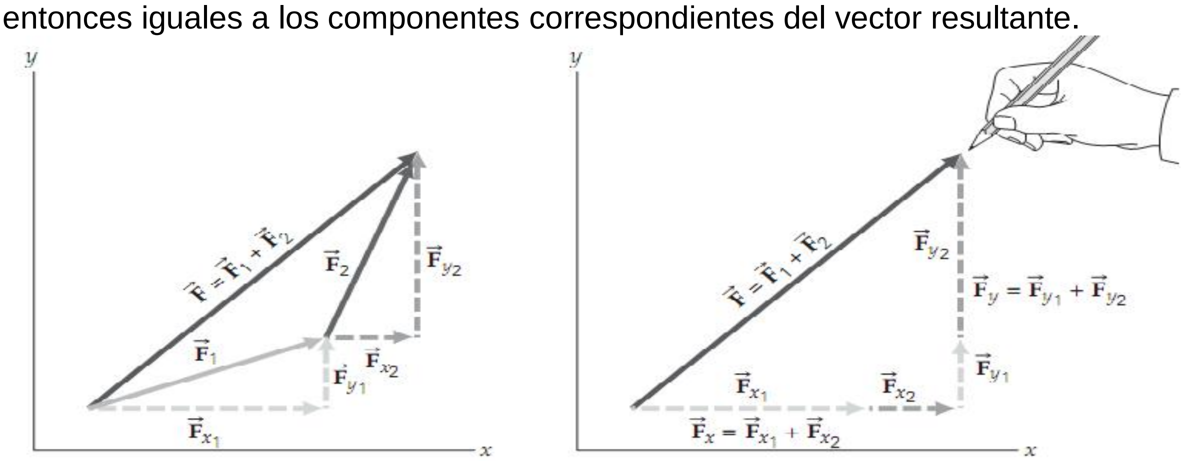


**Fig. 12**

El mismo principio es válido si tenemos que sumar tres (o más) vectores. Podríamos obtener la resultante aplicando el método gráfico de punta a cola. Sin embargo, esta técnica implica dibujar los vectores a escala y usar un transportador para medir ángulos, lo cual quizá se lleve mucho tiempo. De hecho, por lo general es más conveniente juntar todas las colas en el origen, como en la Fig. 13. Tampoco es necesario dibujar los vectores a escala, ya que el dibujo aproximado es sólo una ayuda visual para aplicar el método analítico.

En el método de componentes, descomponemos los vectores que se van a sumar en sus componentes **x** y **y**, sumamos los componentes respectivos, y los recombinamos para obtener la resultante, que se muestra en la Fig 13. Si examinamos los componentes **x**, veremos que su suma vectorial tiene la dirección $-x$. Asimismo, la suma de los componentes **y** tiene la dirección $+y$.

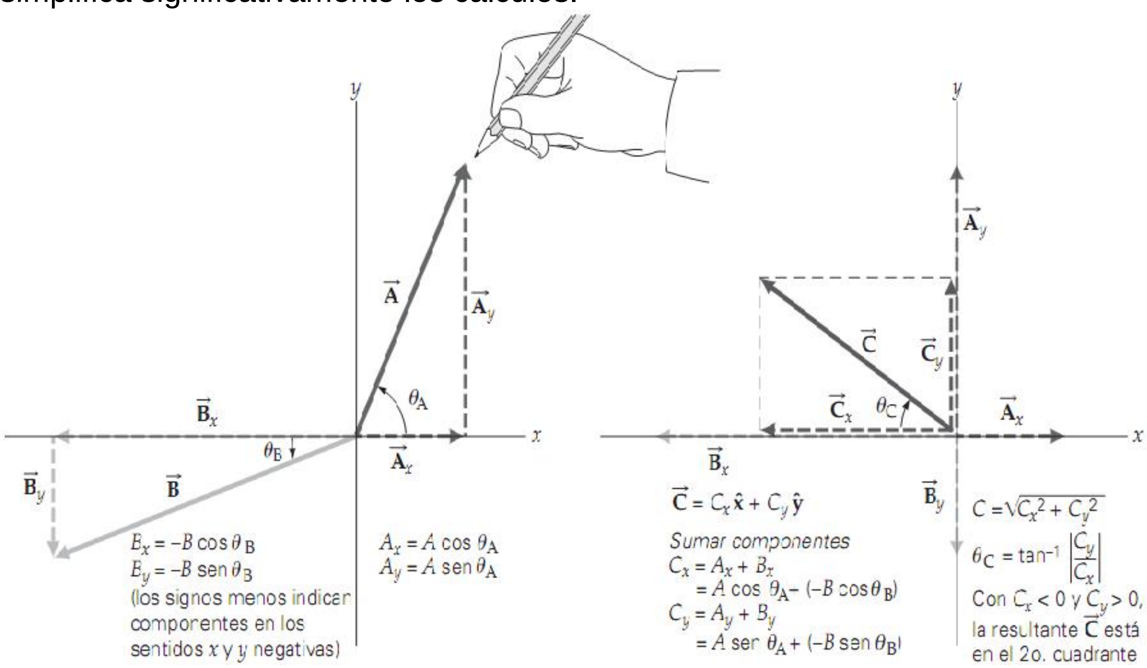
(Observemos que $\vec{v}_2$ está en la dirección **y** y su componente **x** es cero, y que un vector en la dirección *x* tendría componente **y** cero.)

Si usamos la notación de los signos más y menos para indicar sentidos, escribiremos los componentes **x** y **y** de la resultante como: $v_x = v_{x1} - v_{x3}$ y

$v_y = v_{y1} - v_{y3}$

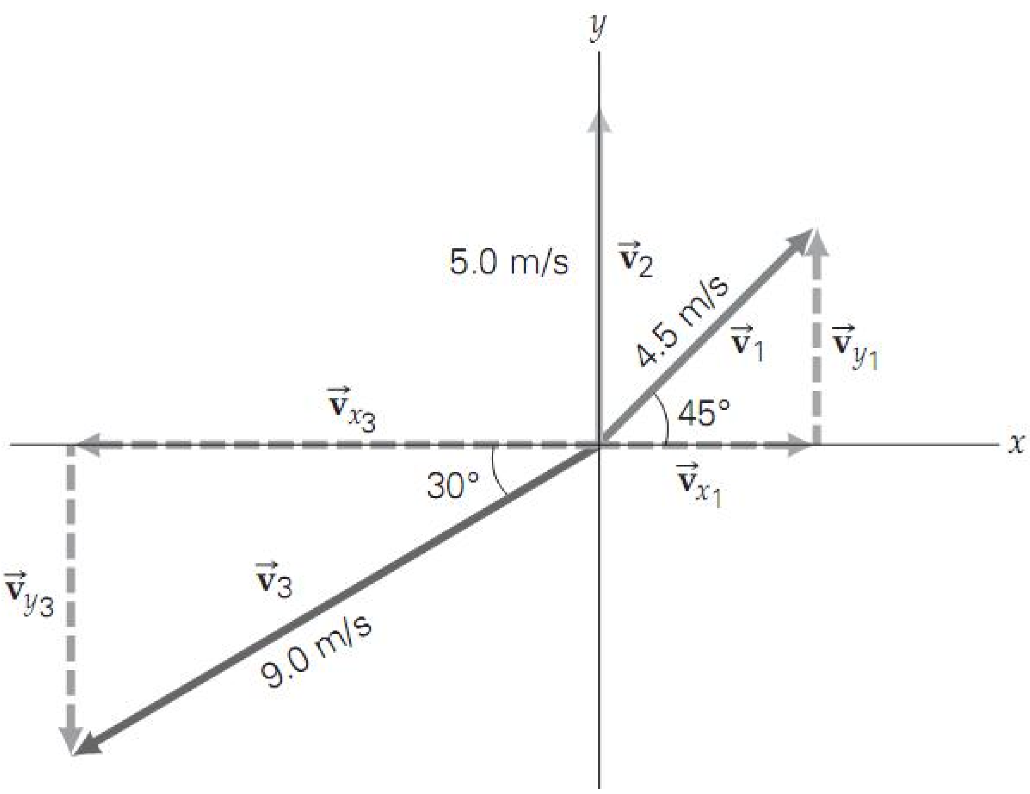
Una vez calculados los valores numéricos de los componentes de los vectores y sustituidos en estas ecuaciones, tendremos los valores de $v_x < 0$ y $v_y > 0$ como se muestra en la Fig. 13.

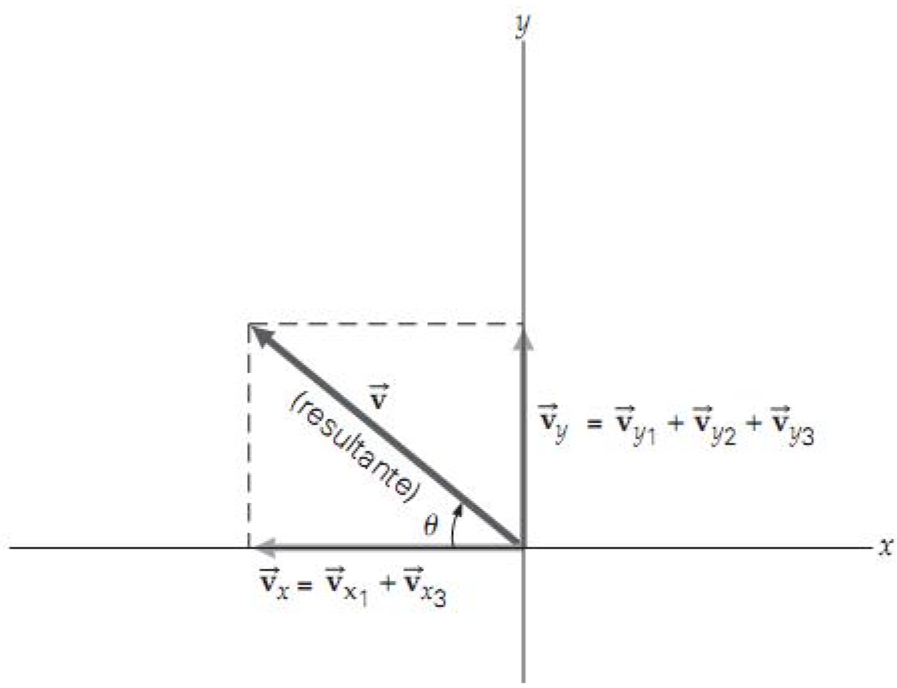
Observemos también en la Fig. 13 que el ángulo direccional ¯ de la resultante se da respecto al eje **x**, lo mismo que los de los vectores individuales de la Fig. 13. *Al sumar vectores por el método de componentes, usaremos como referencia el eje* **x** *más cercano, es decir, el eje* $+x$ o *el eje* $-x$. Esta regla evita tener que manejar ángulos mayores que $90^0$ (como sucede cuando medimos los ángulos de la forma acostumbrada, en sentido contrario a las manecillas del reloj, respecto al eje $+x$) y que usar fórmulas de doble ángulo, como cos (¯ + 90). Esta restricción simplifica significativamente los cálculos.



**Ejemplo:**

1.- Dada la figura calcular el vector resultante, la magnitud y dirección de el.



**Solución.** Los componentes rectangulares de los vectores se muestran en la figura. La suma de esos componentes da,

$$\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} = (v_{x1} + v_{x2} + v_{x3})\hat{x} + (v_{y1} + v_{y2} + v_{y3})\hat{y}$$

$$\vec{v} = (v_1 \cos 45^0 + v_2 \cos 90^0 - v_3 \cos 30^0)\hat{x} + (v_1 sen 45^0 + v_2 sen 90^0 - v_3 sen 30^0)\hat{y}$$

$$\vec{v} = \left(4{,}5\frac{m}{s}\cdot 0{,}707 + 5{,}0\frac{m}{s}\cdot 0 - 9{,}0\frac{m}{s}\cdot 0{,}866\right)\hat{x} + \left(4{,}5\frac{m}{s}\cdot 0{,}707 + 5{,}0\frac{m}{s}\cdot 1 - 9{,}0\frac{m}{s}\cdot 0{,}50\right)\hat{y}$$

$$\bar{v} = \left(-4{,}6\frac{m}{s}\right)\hat{x} + \left(3{,}7\, m/s\right)\hat{y}$$

La magnitud del vector resultante

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(-4{,}6\frac{m}{s}\right)^2 + \left(3{,}7\frac{m}{s}\right)^2} = 5{,}9\frac{m}{s}$$

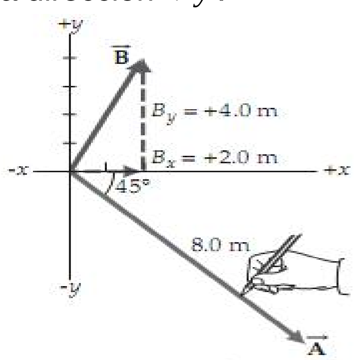
Puesto que el componente x es negativo y el componente y es positivo, la resultante está en el segundo cuadrante, con un ángulo de

$$- = \tan^{-1}\left|\frac{3{,}7\frac{m}{s}}{-4{,}6\frac{m}{s}}\right| = 39^0$$

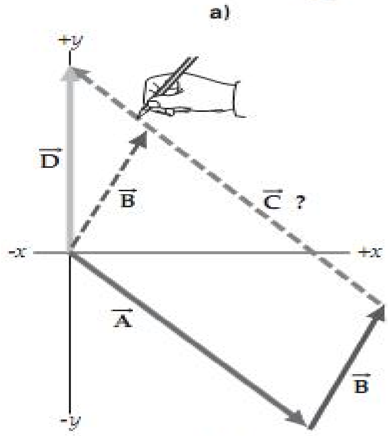
Por lo tanto la dirección es $180^0 - 39^9 = 141^0$

## Ejercicios

- Tenemos dos vectores de desplazamiento: $\vec{A}$ con magnitud de 8.0 m y dirección de $45^0$ por debajo del eje $+x$, y $\vec{B}$ cuyas componentes **x** y **y** son 2.0 m y 4.0 m, respectivamente. Encuentre un vector $\vec{C}$ tal que $\vec{A}+\vec{B}$ sea igual a un vector $\vec{D}$ con magnitud de 6.0 m en la dirección $+y$.




a)



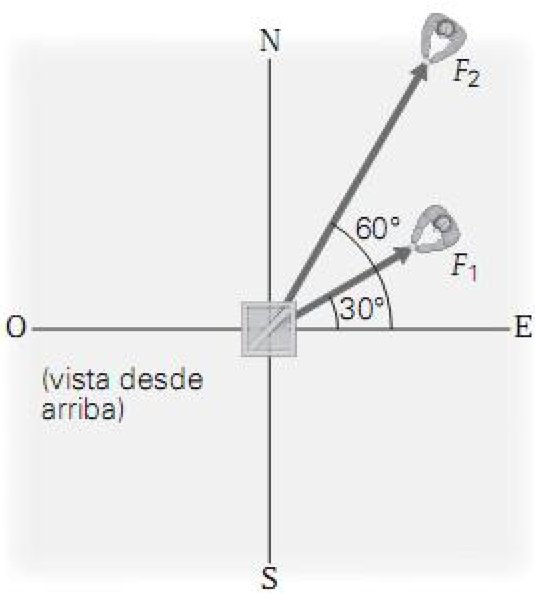

b)

● Un vector tiene un componente $x$ de $-2.5$ m y un componente y de 4.2 m. Exprese el vector en forma de magnitud-ángulo.

● Para los dos vectores $\vec{\mathbf{x}}_1 = (20\text{ m})\,\hat{\mathbf{x}}$ y $\vec{\mathbf{x}}_2 = (15\text{ m})\,\hat{\mathbf{x}}$, calcule y muestre gráficamente *a*) $\vec{\mathbf{x}}_1 + \vec{\mathbf{x}}_2$, *b*) $\vec{\mathbf{x}}_1 - \vec{\mathbf{x}}_2$ y *c*) $\vec{\mathbf{x}}_2 - \vec{\mathbf{x}}_1$.

● Durante un despegue (en aire inmóvil), un avión se mueve a una rapidez de 120 mi/h con un ángulo de 20° sobre el suelo. ¿Qué velocidad tiene el avión respecto al suelo?

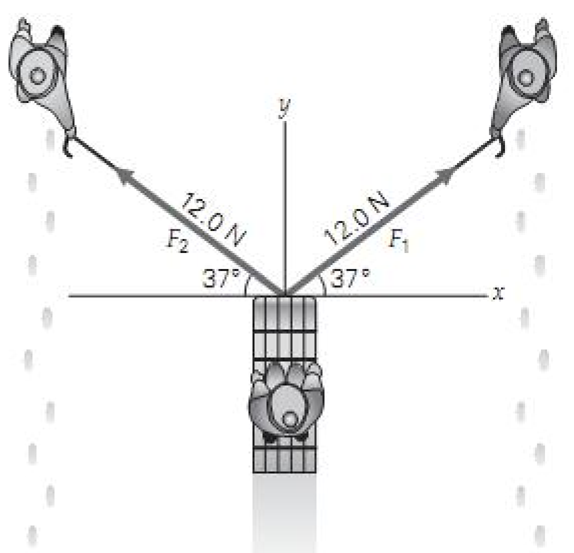
●● Dos muchachos tiran de una caja por un piso horizontal, como se muestra en la ▾ figura 3.24. Si $F_1 = 50.0$ N y $F_2 = 100$ N, encuentre la fuerza (o suma) resultante mediante *a*) el método gráfico y *b*) el método de componentes.




◀ **FIGURA 3.24**

●● Para cada uno de los vectores dados, determine un vector que, al sumársele produzca un vector nulo (un vector con magnitud cero). Exprese el vector en la otra forma (componentes o magnitud-ángulo), no en la que se dio. *a*) $\vec{\mathbf{A}} = 4.5$ cm, 40° arriba del eje $+x$; *b*) $\vec{\mathbf{B}} = (2.0\text{ cm})\,\hat{\mathbf{x}} - (4.0\text{ cm})\,\hat{\mathbf{y}}$, *c*) $\vec{\mathbf{C}} = 8.0$ cm con un ángulo de 60° arriba del eje $-x$.

●● Dos hermanos están jalando a su otro hermano en un trineo (▾figura 3.25). *a*) Encuentre la resultante (o suma) de los vectores $\vec{\mathbf{F}}_1$ y $\vec{\mathbf{F}}_2$. *b*) Si $\vec{\mathbf{F}}_1$ en la figura estuviera a un ángulo de 27° en vez de 37° con el eje $+x$, ¿cuál sería la resultante (o suma) de $\vec{\mathbf{F}}_1$ y $\vec{\mathbf{F}}_2$?

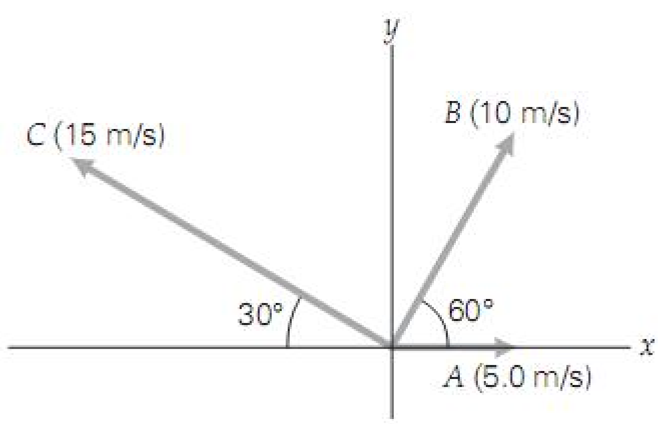



◀ **FIGURA 3.25**

●● Dados dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$, con longitud de 10.0 y angulado 45° bajo el eje $-x$, y $\vec{\mathbf{B}}$, que tiene un componente $x$ de $+2.0$ y un componente $y$ de $+4.0$, *a*) dibuje los vectores en los ejes $x$-$y$, con sus "colas" en el origen, y *b*) calcule $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$.

●● La velocidad del objeto 1 en forma de componentes es $\vec{\mathbf{v}}_1 = (+2.0 \text{ m/s})\,\hat{\mathbf{x}} + (-4.0 \text{ m/s})\,\hat{\mathbf{y}}$. El objeto 2 tiene el doble de la rapidez del objeto 1, pero se mueve en dirección contraria. *a*) Determine la velocidad del objeto 2 en notación de componentes. *b*) ¿Cuál es la rapidez del objeto 2?

●● Para los vectores de la ▼figura 3.26, obtenga $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}$.



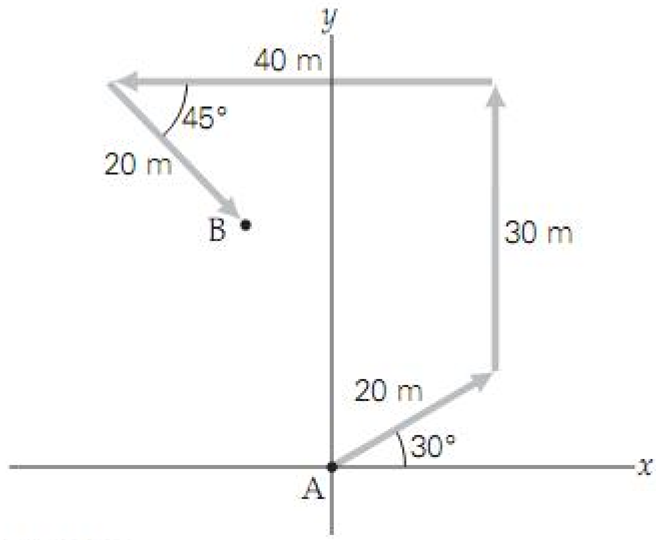

▲ **FIGURA 3.26**

●● Para los vectores de velocidad de la figura 3.26, obtenga $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{C}}$.

●● Dos vectores de fuerza, $\vec{\mathbf{F}}_1 = (3.0 \text{ N})\,\hat{\mathbf{x}} - (4.0 \text{ N})\,\hat{\mathbf{y}}$ y $\vec{\mathbf{F}}_2 = (-6.0 \text{ N})\,\hat{\mathbf{x}} + (4.5 \text{ N})\,\hat{\mathbf{y}}$ se aplican a una partícula. ¿Qué tercera fuerza $\vec{\mathbf{F}}_3$ haría que la fuerza neta o resultante sobre la partícula fuera cero?

●● Dos vectores de fuerza, $\vec{\mathbf{F}}_1 = 8.0$ N con un ángulo de 60° arriba del eje $+x$ y $\vec{\mathbf{F}}_2 = 5.5$ N con un ángulo de 45° abajo del eje $+x$, se aplican a una partícula en el origen. ¿Qué tercera fuerza $\vec{\mathbf{F}}_3$ haría que la fuerza neta o resultante sobre la partícula fuera cero?

●●● Una persona camina del punto A al punto B como se muestra en la ▾ figura 3.28. Calcule su desplazamiento relativo al punto A.




▲ **FIGURA 3.28**

●●● Dos estudiantes tiran de una caja como se muestra en la figura 3.24. Si $F_1 = 100$ N y $F_2 = 150$ N, y un tercer estudiante quiere detener la caja, ¿qué fuerza deberá aplicar?