COLEGIO SAN SEBASTIAN DE LOS ANDES

Guía de Reforzamiento Matemática 3° Medio 2016

El conjunto de los números complejos

1. Números imaginarios

1.1. Concepto de número imaginario

Si tratamos de resolver la ecuación $x^2+1=0$, necesariamente llegamos a la situación $x^2=-1$.
Como hemos visto en cursos anteriores, esta ecuación, aparentemente simple, no tiene solución en el cuerpo o campo de los números reales, ya que no existe ningún número real cuyo cuadrado sea negativo.

Ante esta dificultad, se creó un nuevo tipo de números que fueron denominados **números imaginarios**. La característica de estos números es que al elevarlos al cuadrado dan como resultado un número negativo.

Entre estos números se distingue la unidad imaginaria que se simboliza por i, y se define como:

$$i^2=-1 \text{ es decir } i=\sqrt{-1}$$

Ahora, si la unidad imaginaria la multiplicamos por un factor real, da como origen a los llamados **números imaginarios puros**, que se simboliza por:

$$bi \;;\; b\in R^* \qquad\qquad R^*=R-\{0\}$$

Ejemplos

1.- Son números imaginarios puros: $2i$; $-5i$; $-\sqrt{3}i$; $\sqrt[5]{10}i$

2.- Expresemos las siguientes raíces cuadradas de números negativos como números imaginarios puros.

a. $\sqrt{-4}=2i$ ya que $(2i)^2=4i^2=4(-1)=-4$
b. $\sqrt{-13}=\sqrt{13}i$
c. $-\sqrt{-25}=-5i$
d. $\sqrt{-160}=\sqrt{160}i=4\sqrt{10}i$

La resolución de ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2+c=0$, con $a,c\in R^*$, da origen a números imaginarios puros, como podemos verificar en los casos siguientes.

Ejemplos

1.- $x^2+4=0 \Rightarrow x^2=-4 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-4}=\pm 2i$; $x_1=2i$, $x_2=-2i$

2.- $x^2+2=0 \Rightarrow x^2=-2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-2}=\pm\sqrt{2}i$; $x_1=\sqrt{2}i$, $x_2=-\sqrt{2}i$

También es posible sumar, restar, multiplicar o dividir números imaginarios entre sí o con números reales.

Ejemplos

1.- $6i + 2i = (6+2)i = 8i$

2.- $6i - 2i = (6-2)i = 4i$

3.- $\dfrac{6i - 7(5i - 2i)}{3} = \dfrac{6i - 7(3i)}{3} = \dfrac{6i - 21i}{3} = \dfrac{-15i}{3} = -5i$

4.- $-5 \cdot (6i) = (-5 \cdot 6) \cdot i = -30i$

5.- $6i \cdot 2i = (6 \cdot 2) \cdot i^2 = 12(-1) = -12$

6.- $\dfrac{6i}{2i} = 3$

1.2. Potencias de i

Las potencias de la unidad imaginaria i se logran a partir de las siguientes potencias básicas:

$$i^0 = 1 \quad \text{y} \quad i^2 = -1$$

Las potencias de base i y exponente n entero $\left(n \in Z_0^{\ +}\right)$, esto es i^n, son:

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i \cdot i^2 = i \cdot (-1) = -i$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$

$i^5 = i^4 \cdot i = i$

$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$

$i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$

$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$

$i^9 = i^5 \cdot i^4 = i \cdot 1 = i$

.

.

.

.

$i^{20} = \left(i^5\right)^4 = i^4 = 1$

Podemos comprobar que las cuatro primeras potencias desde i^1 hasta i^4, son todas distintas, pero luego estas se repiten en cuanto un exponente con otro (i^1 con i^5, i^5 con i^9, etc.) tiene una diferencia de 4 unidades, lo que se denomina "módulo 4". Así las potencias i^1, i^2, i^3, i^4 se llaman potencias básicas o canónicas de i

$$
\begin{aligned}
i^1 &= i^5 = i^9 = i^{13} = ... = i \\
i^2 &= i^6 = i^{10} = i^{14} = ... = -1 \\
i^3 &= i^7 = i^{11} = i^{15} = ... = -i \\
i^4 &= i^8 = i^{12} = i^{16} = ... = 1
\end{aligned}
$$

A partir de estas potencias canónicas de i es posible caracterizar cualquier potencia de exponente mayor que 4, como se indica en la tabla siguiente.

Potencias canónicas de i	**Potencia equivalente ($n \in Z_0^+$)**	**Exponente**
i^1	i^{4n+1}	Múltiplo de 4, más 1 $\{4n+1 / n \in Z_0^+\} = \{1,5,9,.....\}$
i^2	i^{4n+2}	Múltiplo de 4, más 2 $\{4n+2 / n \in Z_0^+\} = \{2,6,10,.....\}$
i^3	i^{4n+3}	Múltiplo de 4, más 3 $\{4n+3 / n \in Z_0^+\} = \{3,7,11,.....\}$
i ^{4}	i^{4n+4}	Múltiplo de 4, más 4 $\{4n+4 / n \in Z_0^+\} = \{4,8,12,.....\}$

Ejemplos

Expresemos en una forma más simple y calculemos las siguientes potencias de i.

1.- $i^{23} = i^{20+3} = i^{20} \cdot i^3 = i^{4 \cdot 5} \cdot i^3 = \left(i^4\right)^5 \cdot i^3 = 1 \cdot -i = -i$

2.- $\left(i^{13}\right)^{10} = i^{130} = i^{4 \cdot 32+2} = i^2 = -1$

3.- $\left(i^4\right)^3 + \left(i^3\right)^2 - (2i)^5 + 6i^5 \cdot i^2 = 1 + (-i)^2 - 32i - 6i = -38i$

4.- $(-i)^3 + (-i)^2 + 2(-i)^5 = -i^3 + i^2 - 2i^5 = -(1+i)$

5.- $i^{10} - 2i^{80} + 5i^{125} - 12i^{51} = -1 - 2 + 5i + 12i = -3 + 17i$

Guía de ejercicios

1.- Expresa cada una de las siguientes raíces cuadradas como un número imaginario.

a) $\sqrt{-7}$ b) $\sqrt{-48}$ c) $-\frac{1}{25}\sqrt{-200}$ d) $\sqrt{-5a^2b^2}$

e) $-\sqrt{-96x}$; $x \in R^+$

2.- Escribe los números imaginarios que son solución de las ecuaciones.

a) $x^2 = -25$ b) $x^2 = -5$ c) $x^2 + 30 = 0$ d) $4x^2 + 1 = 0$

e) $\sqrt{2} + x^2 = 0$ f) $3 + \sqrt{5}x^2 = 0$ g) $\frac{x^2}{2} + 12 = 0$ h) $-x^2 - 300 = 0$

i) $-100x^2 = 256$ j) $-156x^2 - 624 = 0$

3.- Reduce cada expresión y exprésala como un número imaginario.

a) $\sqrt{-36} - \sqrt{-225}$ b) $\sqrt{-11} + \sqrt{-15}$ c) $\sqrt{-5} \cdot \sqrt{-11a^2}$

d) $\sqrt{-17x} \cdot \sqrt{-4x}$; $x \in R^+$ e) $\frac{\sqrt{-9}}{\sqrt{-36}}$ f) $\frac{-a\sqrt{-20a^4}}{\sqrt{-75a^3}}; a \in R^+$

4.- Calcula:

a) $(3i^3)^2$ b) $7(8i)$ c) $5i^{36} - 7i^{102} + i^{201}$ d) $i^{15} \cdot \frac{i^{31}}{i^{72}} \cdot i^{250}$

e) $6i^{21} - \sqrt{2}i^{13} + 4\sqrt{2}i^{91}$ f) $0{,}2i^{500} - 3i^{95} + 0{,}8i^{536}$ g) $\frac{i^{21} + i^4 + i^{44}}{2 - i^9 + i^{10} - i^{19}}$

h) $i^{40} + i^{41} + \dots\dots + i^{50} + \dots\dots + i^{120}$